بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

www.tafrihicenter.ir/edu کلیک کنید

نمونه سوال

گام به گام

امتحان نهایی

جزوه

دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

کاربردهای مشتق

فصل ۵

۱ اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

۳ رسم نمودار توابع

گردنه حیران (اردبیل)

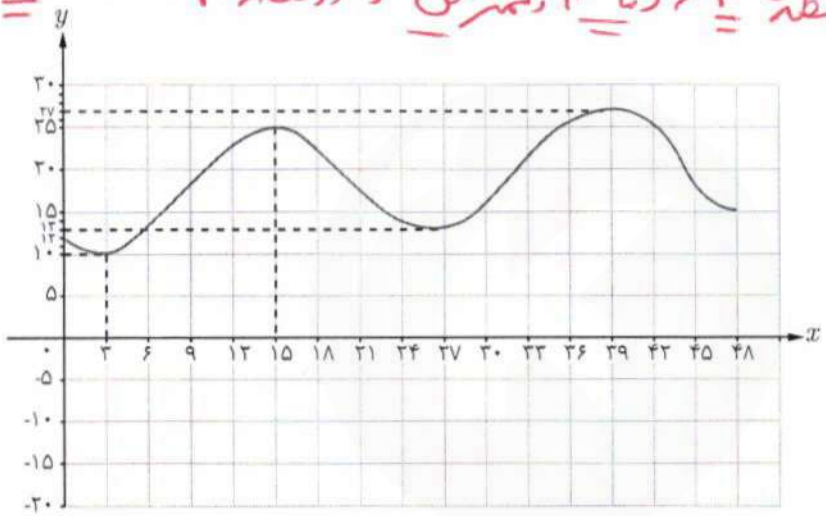
سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان ـ زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس برنمودار مکان زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

در نقطه‌ی ۳ ، دما ۱۰ و کمترین و در نقطه‌ی ۳۹ ، دما ۲۷ و بیشترین



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد.

نقاط به طول ۳ و ۲۷ به‌گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت :

تعریف :

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۲۵ , ۱۵) و (۲۷ , ۳۹) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۵$ و $x = ۳۹$ اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۱۰ , ۳) و (۱۳ , ۲۷) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۰$ و $x = ۱۳$ اتفاق افتاده‌اند.

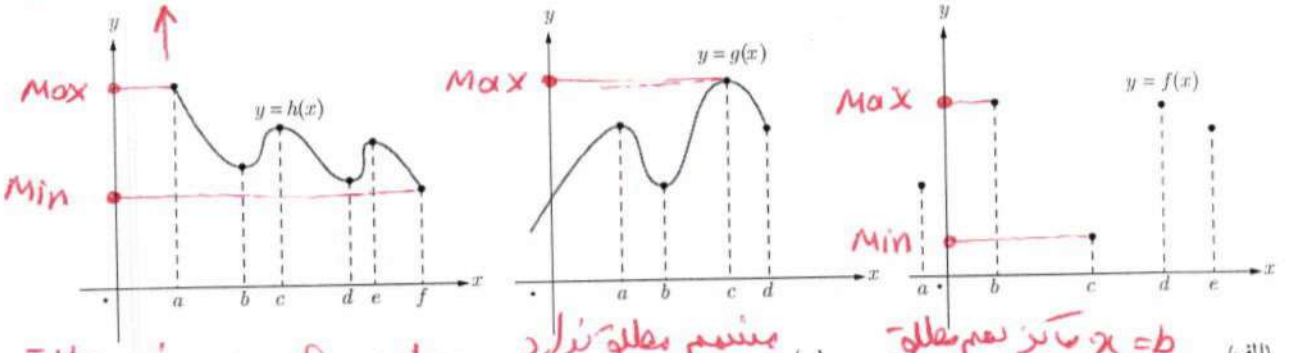
در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک مجموعه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در مجموعه I به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطهٔ نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x = a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه موردنظر است. به عبارتی برای هر $x \in I$ داریم $f(x) \leq f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است.

✤ تذکر : گوییم تابع f در نقطهٔ $x = c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x = c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

$x = a$ ماکزیمم مطلق



(الف) $x = b$ ماکزیمم مطلق

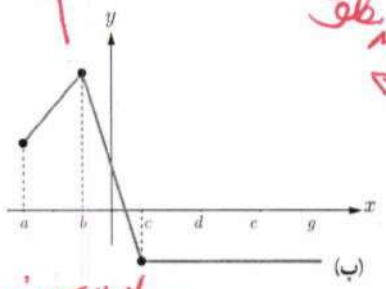
$x = c$ ⇐ مینیمم مطلق

(ب) مینیمم مطلق ندارد

$x = c$ ، ماکزیمم مطلق

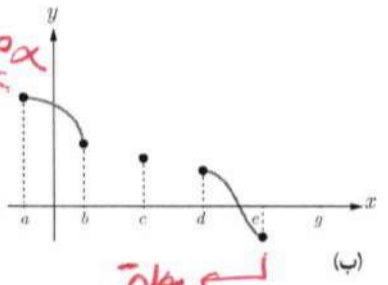
(پ) $x = f$ ⇐ مینیمم مطلق

۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



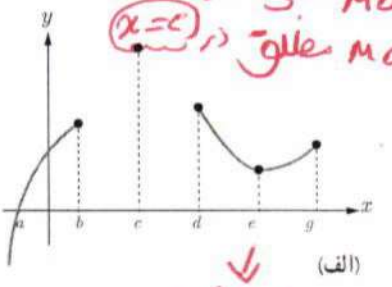
Max مطلق و نسبی

Min مطلق و نسبی



Max مطلق

Min مطلق



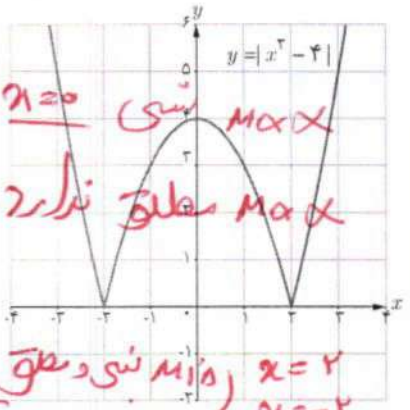
Max نسبی ندارد

Max مطلق در $x=c$

Min نسبی

Min مطلق ندارد

۳ در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.

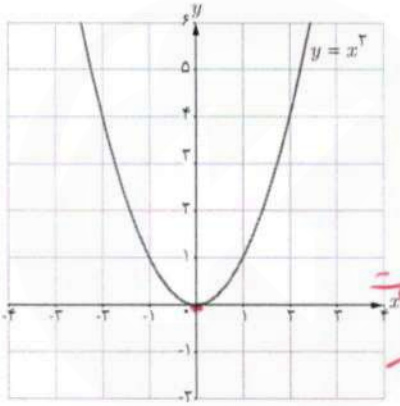


$x=0$ برابر ۴ Max نسبی

Max مطلق ندارد

$x=2$
$x=-2$ } Min نسبی و مطلق

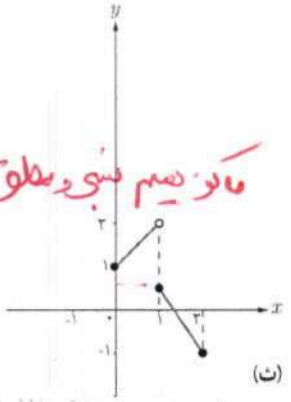
ابسیسه صفر و مقدار هر دوی آنها



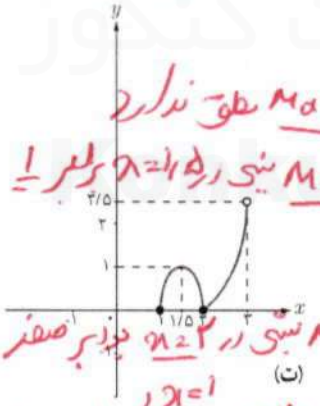
$x=0$ } Min نسبی و مطلق

مقدار برابر ۰ است

Max نسبی و مطلق ندارد



ماکزیمم نسبی و مطلق ندارد

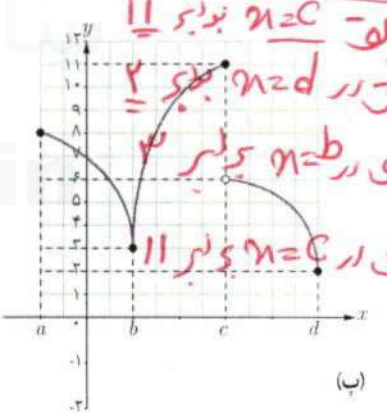


Max مطلق ندارد

Max نسبی در $x=1/5$ برابر ۱

Min نسبی در $x=2$ برابر صفر

$x=1$
$x=2$ } Min مطلق در برابر صفر



Max مطلق $x=c$ برابر ۱۱

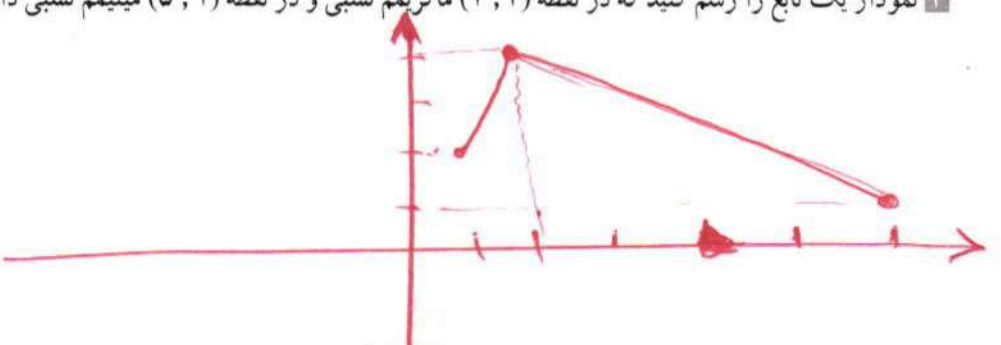
Min مطلق در $x=d$ برابر ۲

Min نسبی در $x=b$ برابر ۳

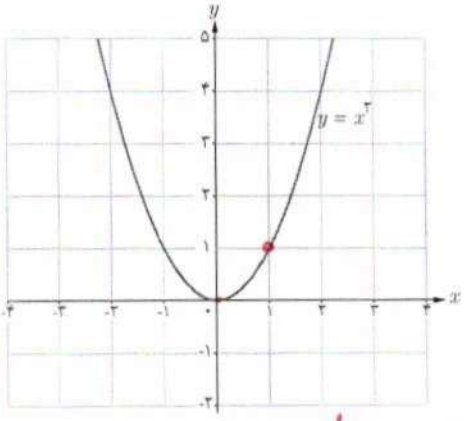
Max نسبی در $x=c$ برابر ۱۱

Min مطلق $(-1,3)$ است

۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطهٔ (۴ , ۲) ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ (۱ , ۵) مینیمم نسبی دارد.



ب) در $x=0$ یعنی $(0,0)$ Min مطلق دارد اما ماکزیمم مطلق ندارد.



۵ تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.

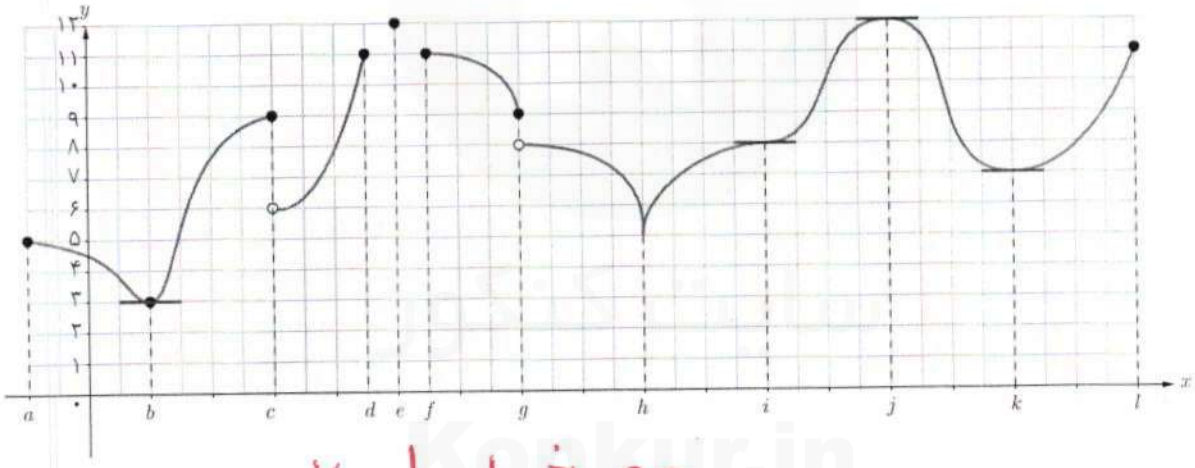
ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

الف) در $[0,1]$ ، Min مطلق برای 0 و Max مطلق برای 1

اما در $(0,1)$ ، Min و Max مطلق ندارد.

فعالیت

۱ در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید. c و j و b و h و k

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید. a و c و d و e و f و g و h و l

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید. b و i و j و k

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟ خیر

ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟ صفر

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟ بله (نقطه‌ی i)

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟ بله

در نقطه‌ی e

چون V روی $[0, 4]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق در این بازه است و داریم :

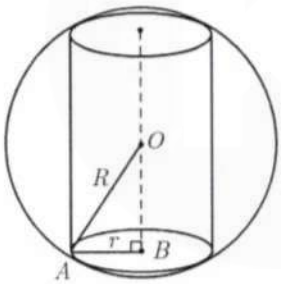
$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$$

$$(3x-5)(x-6) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad \text{یا} \quad x = 6$$

اما $x = 6$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x = \frac{5}{3}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(0) = 0$ ، $V(\frac{5}{3}) > 0$ و $V(4) = 0$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x = \frac{5}{3}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{5}{3}$ اینچ باشد.

❖ مثال : در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

❖ حل : فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه OAB ، $OB = \frac{h}{2}$ و داریم :



$$AB^2 + OB^2 = OA$$

بنابراین $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$.

حجم این استوانه برابر است با :

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h \Rightarrow V(h) = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3 \ ; \ 0 \le h \le 2R$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه $[0, 2R]$، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم :

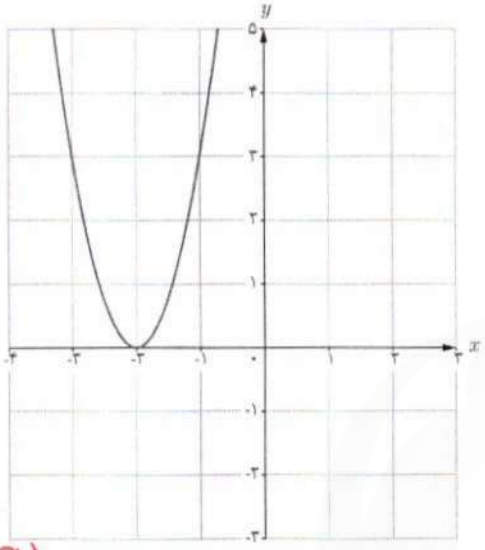
$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

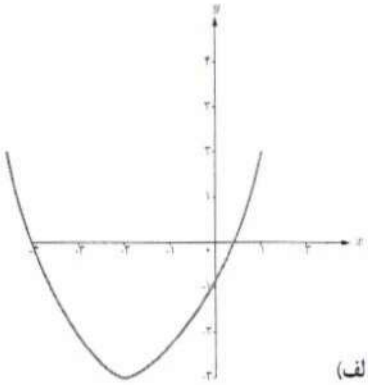
از طرفی $V(0) = 0$ و $V(2R) = 0$

بنابراین تابع V به ازای $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ، بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$ ، مقدار r برابر با $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ می‌باشد.

کار در کلاس

۱ اگر شکل کشیده شده در صفحهٔ شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



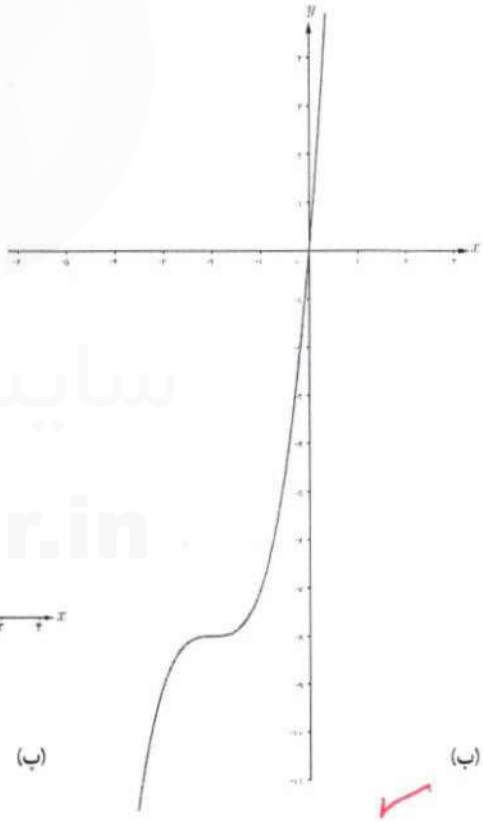


(الف)

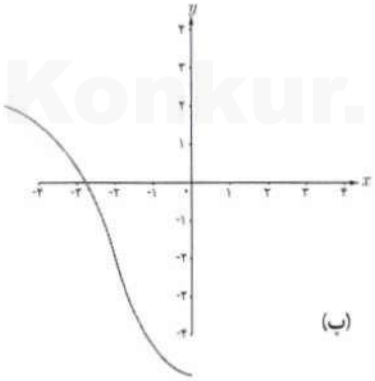
$a>0$

$-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} -b<0 \Rightarrow b>0$

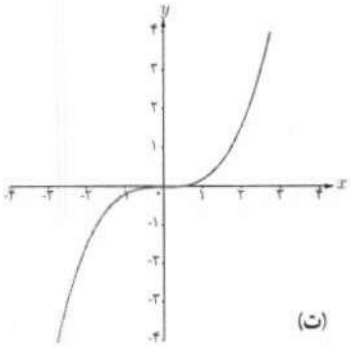
یعنی تابع صعودی و طول نقطه عطف آن منفی می‌باشد



(ب)



(پ)



(ت)

سایت کنکور
Konkur.in

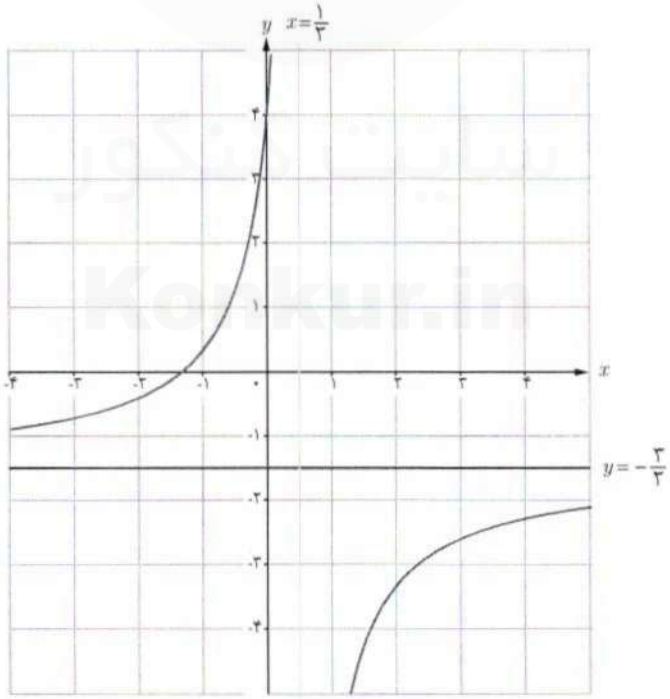
بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty , \frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{2} , +\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت :

$$f''(x) = \frac{44}{(-2x+1)^3} \quad \text{و} \quad x \neq \frac{1}{2}$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty , \frac{1}{2})$ داریم $f'' > 0$، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازهٔ $(\frac{1}{2} , +\infty)$ داریم $f'' < 0$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		+		+		+		+	
y''		∪ +		∪ +		∪ +		∩ −	
y	$-\frac{3}{2}$	↗	0	↗	4	↗	$-\infty \quad +\infty$	↗	$-\frac{3}{2}$

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.



$\frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c$, $d = -2c$ (۲)

$(-1, 0) \Rightarrow a(-1) + b = 0 \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow f(x) = \frac{ax + a}{ax - 2a} \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

تمرین

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5$

پ) $f(x) = -x(x+2)^2$

ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

ث) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

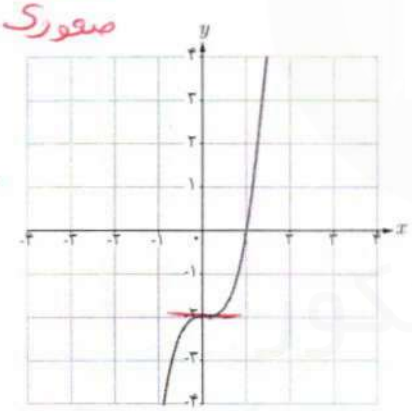
۲ فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ (۱ , ۲) است. اگر این تابع از نقطهٔ (۰ , ۱−) بگذرد، ضابطهٔ تابع را به دست آورید. حل بالای صفحه

۳ کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.

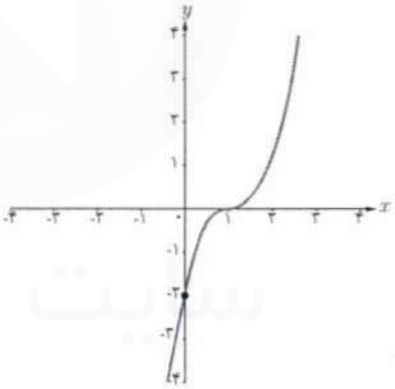
$x = -\frac{b}{3a} = 0 \Rightarrow f(0) = -2$

عطف

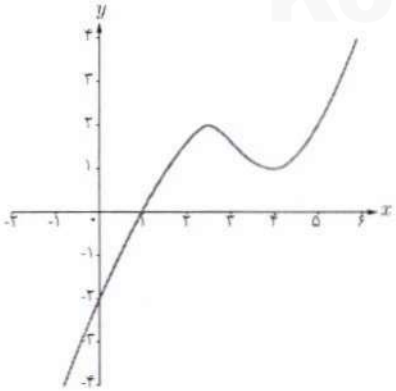
$a > 0 \Rightarrow$ صعودی



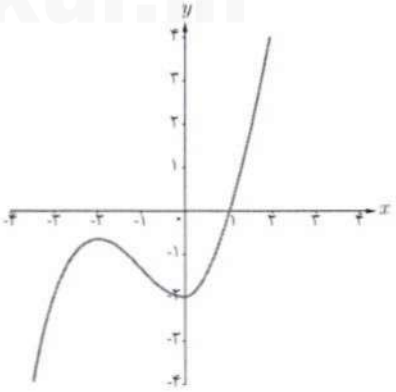
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

سایت کنکور
Konkur.in

ادامه‌ی حل تمرین صفحه‌ی ۱۴۴/۳

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

(۵/۱) $f(x) = \frac{-x}{x+3} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3\}$

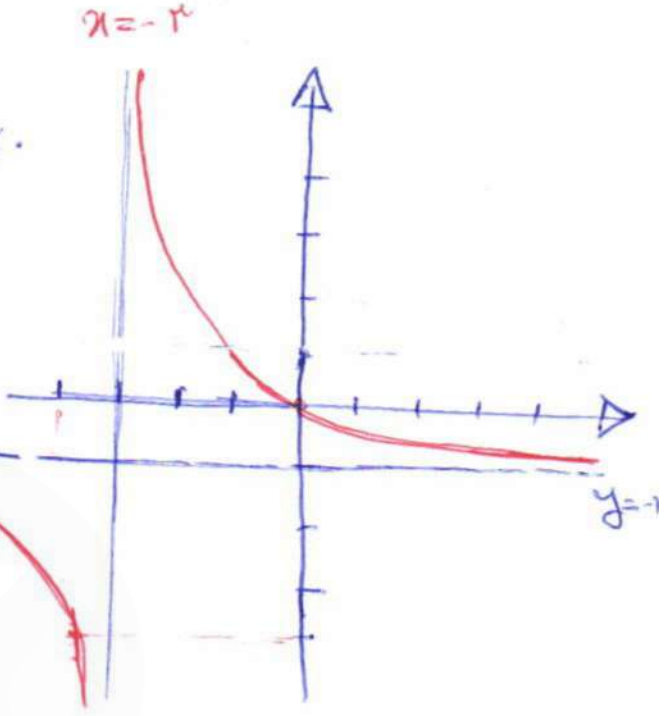
(۱)
$\lim_{x \to -3} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -3$ مجانب قائم

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x+3} = -1 \Rightarrow y = -1$ افقی

(۲) $f'(x) = \frac{-(x+3)-(1)(-x)}{(x+3)^2} = \frac{-3}{(x+3)^2} < 0$

(۳) $f''(x) = \frac{6}{(x+3)^3}$ $\left(\begin{array}{l} x+3=0 \\ x=-3 \end{array}\right)$

x	$-\infty$	-4	-3	0	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	$-$	
f''	$-$	$-$	$+$	$+$	
f	$-1 \searrow -4 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow -1$		

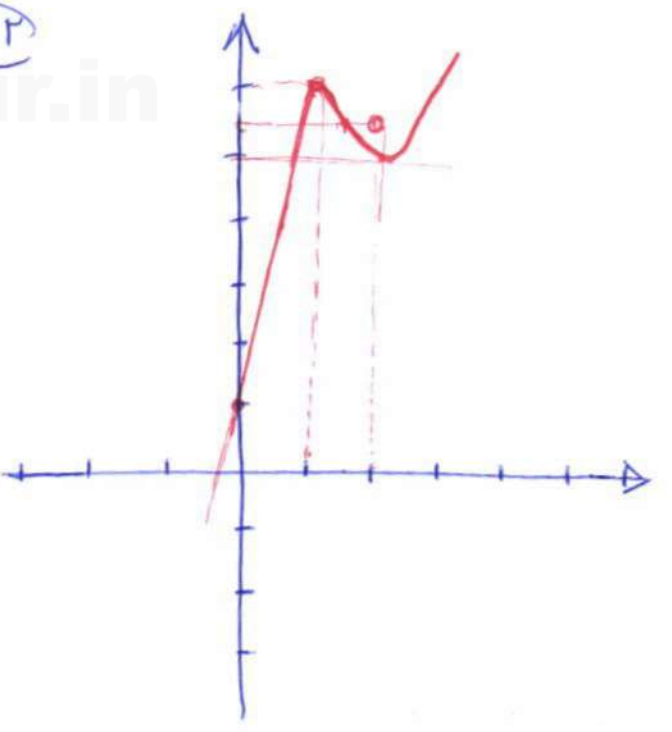


(۶) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	0 (کمکی)	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f'	$+$	$+$	0 $-$	$-$	0 $+$	
f''	$-$	$-$	$-$	0 $+$	$+$	
f	$\nearrow$	$1 \nearrow 4$	$\searrow$	$5/5 \searrow$	$5 \nearrow$	



حل تمرین صفحه ی ۱۴۴/۲ ادامه ی سؤال ب

(ب) $f(x) = -x(x+2)^2 \Longrightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

$f'(x) = -1(x+2)^2 + 2(x+2)(-x) = 0$

$(x+2)(-x-2-2x) = 0$

$(x+2)(-3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f''		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

$f''(x) = 1(-3x-2) + (-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow f''(x) = -3x-2-3x-6 \Rightarrow -6x-8=0$

$\Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

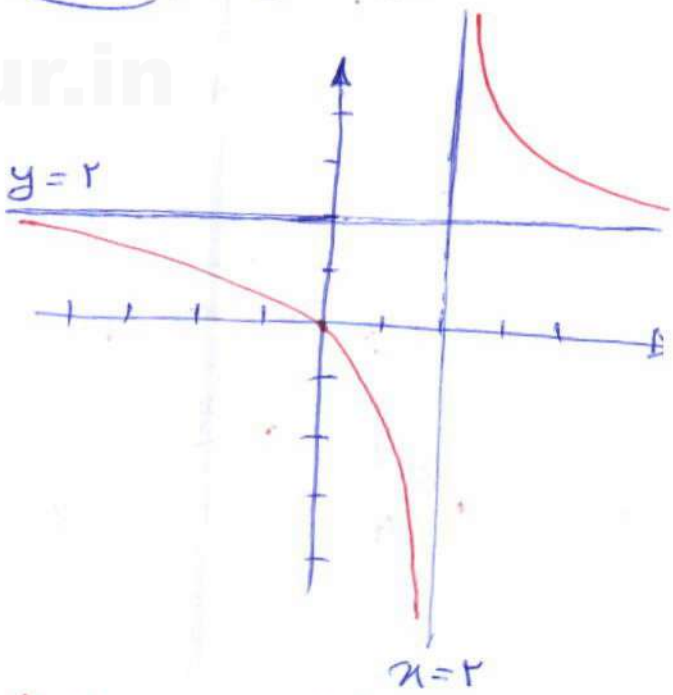
(ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow D = R - \{2\}$

(۱) $\begin{cases} x=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty & \text{مجانب قائم} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

(۲) $f'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$

(۳) $f''(x) = \frac{0+6(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{+6}{(x-2)^3}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$



x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$-$	
f''		$-$		$-$		$+$	
f	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	2

از نقاط دیگری هم تو (۱) استفاده

حل تمرین صفحه ۱۲۶/۱ سؤال ۱۰

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ $\quad D = R$

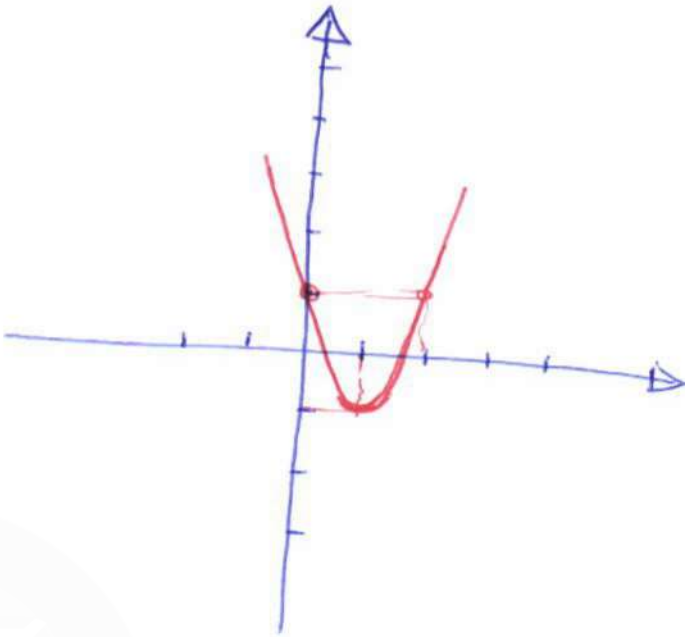
① $f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$

② $f''(x) = 4 > 0$

③ $x = 0 \Rightarrow y = 1$

کلی ②

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$	
f''		$+$		$+$		$+$	
f		$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

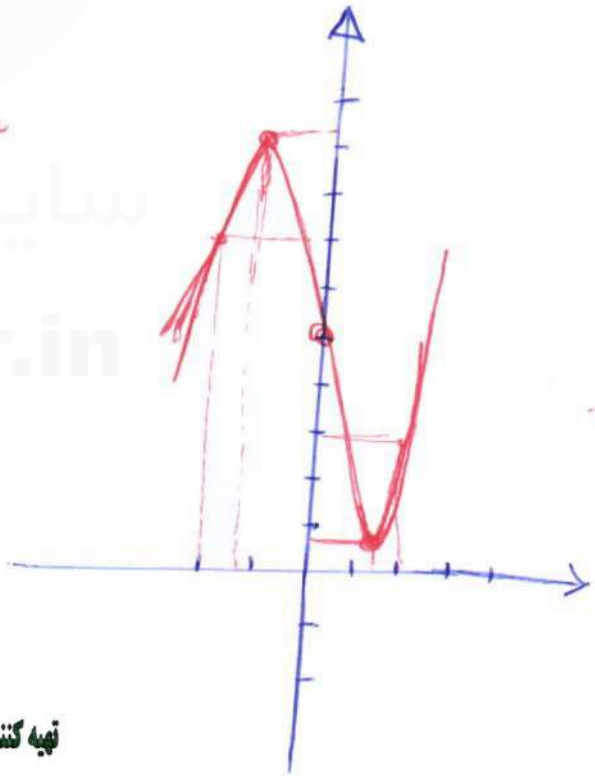


ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5 \Rightarrow D_f = R$

$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \begin{cases} x = \sqrt{\frac{5}{3}} \simeq 1,3 \\ x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \simeq -1,3 \end{cases}$

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{3}}$	2	$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$+$
f''	$-$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+$
f	$\nearrow$	7	$\nearrow$ $9,3$	$\searrow$	5	$\searrow$	$0,7$	$\nearrow$	3 $\nearrow$



سایت کنکور konkur.in

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان